2015 年度　修士論文要旨

電気回路のランダムウォークへの応用

関西学院大学大学院　理工学研究科
数理科学専攻　千代延研究室　中村　彰宏

1　はじめに

本論文では，中学・高校で習ってきた物理の電気回路の分野をマルコフ連鎖（特にランダムウォーク）に応用して様々なグラフの移動確率を求める問題について論じる．

2　マルコフ連鎖とランダムウォーク

マルコフ連鎖とは，粒子の動きが現在の位置と次のステップでどこに移るかの確率（推移確率）のみで決まり，今までの過去の履歴によらない動きのことを言う．特にランダムウォークとは，推移確率が場所によらないようなマルコフ連鎖のことを言う．

3　電気回路の数学的表現

マルコフ連鎖が動くグラフ上を電気回路とみなして議論する．

定義 3.1　有限グラフ (V, B) の各ボンド B の元 $\{x, y\} \in B$ に対して，コンダクタンス（抵抗の逆数）$C := \{C_{xy}\}_{x,y \in V}$ が定義され，次の性質を満たすとする．

$$C_{xy} = C_{yx} \begin{cases} > 0 & \{x, y\} \in B \\ = 0 & \{x, y\} \notin B \end{cases}$$

この時 (V, C) の組を (V, B) 上の電気回路と言う．

さらに，$y_0 \in V$ を接地し，x_0（始点）と y_0（終点）の間に $1V$ の電圧をかけた電気回路について考えるとする．また

- $C_x := \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} C_{xy} = \sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} \frac{1}{R_{xy}}$
- 点 x の電位 $= v(x)$
- 点 x から点 y へ流れる電流量 $= i_{xy}$

と書くことにする．

オームの法則：2 点間の電圧（電位差）は流れる電流と抵抗の積に等しい．

$$v(x) - v(y) = i_{xy} R_{xy}, \quad \{x, y\} \in B$$

キルヒホッフの法則：x_0, y_0 以外の点では，流入電流量と流出電流量の和は等しい．

$$\sum_{\substack{y \in V \\ \{x,y\} \in B}} i_{xy} = 0, \quad x \in V,\ x \neq x_0, y_0$$

電気回路 (V,C) 上の推移確率 $\{P_{xy}\}_{x,y\in V}$ を定義する．

$$P_{xy}=\frac{C_{xy}}{C_x}\Longrightarrow \sum_{\substack{y\in V\\ \{x,y\}\in B}} P_{xy}=\sum_{\substack{y\in V\\ \{x,y\}\in B}}\frac{C_{xy}}{C_x}=\frac{C_x}{C_x}=1$$

となる．この推移確率 $\{P_{xy}\}_{x,y\in V}$ で与えられるマルコフ連鎖を電気回路 (V,C) 上のマルコフ連鎖と呼ぶ．

定義 3.2　有効抵抗 $R(a,b)$ とは，点 a,b 間に $1V$ の電圧を加えたとき，$R(a,b)=1/i_a$ を点 a,b 間の有効抵抗と言う．ただし，i_a は電源から点 a への総流入電流量 $=$ 総流出電流量を表す．言い換えると，点 a と b の 2 点を端点とする回路全体の抵抗のことである．

有効抵抗は対応するマルコフ連鎖の性質に深くかかわっており，それを示すのが次の定義と命題である．

定義 3.3　脱出確率 $P_{esc}(a,b)$ とは，点 a（始点）から出たマルコフ連鎖が点 a に戻る前に点 b（終点）に到達する確率のことである．すなわち，$\tau_x=min\{n\geqq 1:X_n=x\}$ として

$$P_{esc}(a,b)=P^a(\tau_b<\tau_a)$$

が成り立つことである．

オームの法則とキルヒホッフの法則より，有効抵抗と脱出確率について次の命題が成り立つ．

命題 3.4　脱出確率 $P_{esc}(a,b)$ は有効抵抗 $R(a,b)$ により次のように与えられる．

$$P_{esc}(a,b)=\frac{1}{C_aR(a,b)}$$

■

4　無限グラフ上の電気回路とマルコフ連鎖

今までは有限個の頂点からなるマルコフ連鎖について考えてきたが，ここからは無限個の頂点からなるマルコフ連鎖について考えていく．特に次の再帰性と呼ばれる性質について考える．

定義 4.1　再帰的とは，あるマルコフ連鎖が点 x からスタートして，確率 1 でその点 x に戻ってくることである．非再帰的とは，あるマルコフ連鎖が点 x からスタートして、その点 x に戻ってこない場合もあることである．

通常では無限グラフ上の再帰性について調べる計算はとても困難であるが，この命題**??**を使って脱出確率を求めることにより比較的スムーズに考えることができる．本論文ではその方法を紹介する．さらに Matlab を使っていくつかの具体的なグラフについて，乱数を発生させてその脱出確率を求めるシミュレーションと実際に電気回路の理論に基づく連立方程式を解いて脱出確率を求めるプログラムを紹介する．そしてこの二つのプログラムにより出力される結果について，乱数を発生させるシミュレーションのサンプル数を大きくすると，連立方程式に基づいた理論値に収束することを紹介する．

参考文献

[1] 熊谷隆．「確率論，新しい解析学の流れ」，共立出版 (2003)

[2] 熊谷隆．「現代の数学と数理解析」(2014)